Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15

а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

Перейдём к системе

$$\begin{cases}\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1=0,\\ \operatorname{tg} x-\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

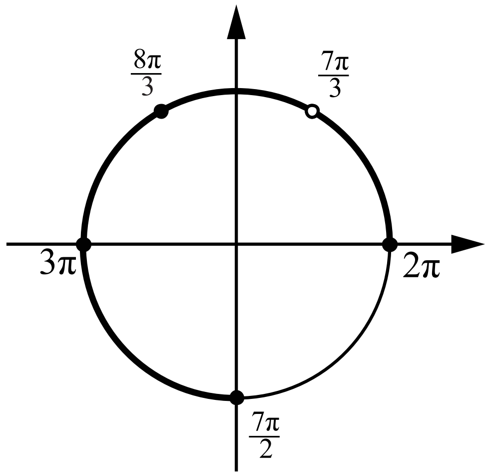
$$1-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-1=0;\quad \sin x\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ или $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Условию $\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\neq 0$ удовлетворяют только решения $x=\pi n$ и $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$.

б) На отрезке $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x=2\pi$, $x=\dfrac{8\pi}{3}$ и $x=3\pi$.



Ответ: а) πn, $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) 2π, $\dfrac{8\pi}{3}$, 3π.

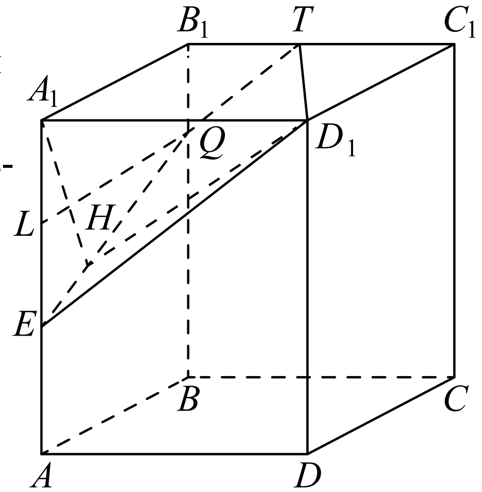
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3:4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

Решение.



а) Так как $A_1E : EA = 3:4$ и $AA_1 = 14$, то $AE = 8$ и $EA_1 = 6$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и BCC_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро BB_1 в такой точке Q, что прямая TQ параллельна прямой ED_1. Значит, треугольники EA_1D_1 и QB_1T подобны, а поскольку $EA_1 = A_1D_1 = 6$, то и $QB_1 = B_1T = 3$. Значит, $QB = 11$ и $QB_1 : QB = 3:11$.

б) Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EQ пересечения этих плоскостей. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1Q высоту $QL = 9$ (очевидно L, середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EQA_1, найдём $A_1H \cdot EQ = A_1E \cdot QL$, то есть $A_1H = \frac{QL \cdot A_1E}{QE} = \frac{9 \cdot 6}{\sqrt{9^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{10}}$. Тогда тангенс искомого угла равен $6 : \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Ответы: а) $3:11$; б) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах.	2
Обоснованно найдено сечение в пункте *а*, ИЛИ верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17 Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 \le \log_{\frac{x}{2}} 5$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при $x > 0$ и $\frac{x}{x-1} > 0$.

Отсюда следует, что $x-1>0$, то есть $x>1$. При этом условии $\frac{x}{x-1}>1$, значит, $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 > 0$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_5 \frac{x}{x-1} \ge \log_5 \frac{x}{2} > 0\text{, откуда } \frac{x}{x-1} \ge \frac{x}{2} > 1.$$

Следовательно, $x > 2$ и $x-1 \le 2$, то есть $x \le 3$.

Ответ: $(2; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

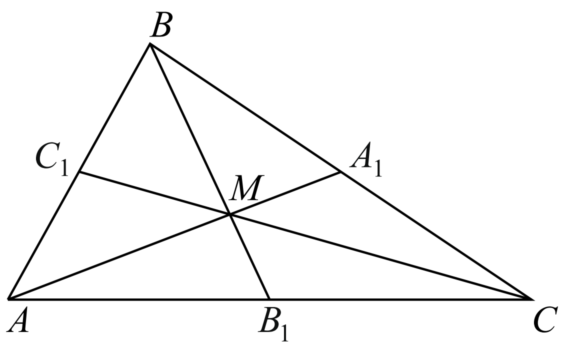
Решение.

а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна $180°$.

Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.



б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 180.$$

Ответ: 180.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

Решение.
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{11S}{12},\ \ldots,\ \frac{2S}{12},\ \frac{S}{12},\ 0.$$

К концу каждого месяца к сумме долга добавляется $r\,\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$.

Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS,\ \frac{11kS}{12},\ \ldots,\ \frac{2kS}{12},\ \frac{kS}{12}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{12},\ \frac{11(k-1)S+S}{12},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{12},\ \frac{(k-1)S+S}{12}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{11}{12}+\ldots+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)=S\left(1+\frac{13(k-1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 13 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому $13(k-1)=0{,}26$; $k=1{,}02$; $r=2$.

Ответ: 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено. ИЛИ Верный ответ найден подбором.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Решение системы может быть единственным в двух случаях.

1 случай. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$x^2+2x-3=0\text{, откуда } x=1 \text{ или } x=-3.$$

Если $x=1$, то $a+2(a+1)+a+1=0$, а значит $a=-\dfrac{3}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases}-7x^2-6x+13\le 0,\\ -3x^2+2x+1\ge 0;\end{cases} \begin{cases}x\le-\dfrac{13}{7} \text{ или } x\ge 1,\\ -\dfrac{1}{3}\le x\le 1.\end{cases}$$

Единственное решение $x=1$.

Если $x=-3$, то $9a-6(a+1)+a+1=0$ и $a=\dfrac{5}{4}$. Система принимает вид

$$\begin{cases}x^2+10x+21\le 0,\\ 5x^2+18x+9\ge 0;\end{cases} \begin{cases}-7\le x\le -3,\\ x\le -3 \text{ или } x\ge -\dfrac{3}{5};\end{cases} -7\le x\le -3.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

2 случай. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}a^2-(a-1)(a+4)=0,\\ a>1,\end{cases} \text{откуда } a=\frac{4}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x=-4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}(a+1)^2-a(a+1)=0,\\ a<0,\end{cases} \text{откуда } a=-1.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\dfrac{3}{4}$, $a=\dfrac{4}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения a,но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получено одно из значений a.	2
Задача верно сведена к исследованию системы уравнений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 Известно, что $a, b, c,$ и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

Решение.

а) Пусть $a=10,$ $b=20,$ $c=11$ и $d=37$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{21}{57}=\frac{7}{19}$.

б) Предположим, что $11\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. Тогда

$$11\cdot(a+c)bd=(b+d)(ad+bc),$$

$$11abd+11bcd=abd+bcd+ad^2+b^2c,$$

$$10abd-ad^2=b^2c-10bcd \text{ и } ad(10b-d)=bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем $10b-d\ge 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10\ge b-10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\ge a\ge 3b+1$ и $c\ge 6d+1$. Значит, $b\le\frac{98}{3}<33$.

Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b\le 32$.
Используя неравенства $a\ge 3b+1,$ $c\ge 6d+1,$ $b\le 32$ и $d\ge 10,$ получаем

$$\frac{a+c}{b+d}\ge\frac{3b+6d+2}{b+d}=3+\frac{3d+2}{b+d}\ge 3+\frac{3d+2}{d+32}=6-\frac{94}{d+32}\ge 6-\frac{94}{42}=\frac{79}{21}.$$

Пусть $a=97,$ $b=32,$ $c=61$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{158}{42}=\frac{79}{21}$.

Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{79}{21}$.

Ответ: а) Да, например, если $a=10,$ $b=20,$ $c=11$ и $d=37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15

а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x+\sqrt{2}\cos x+1}{\operatorname{tg} x-1}=0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение.
Перейдём к системе

$$\begin{cases}\cos 2x+\sqrt{2}\cos x+1=0,\\ \operatorname{tg} x-1\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$$

Преобразуем уравнение

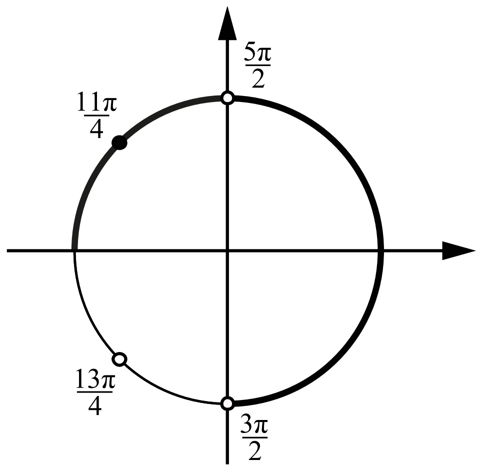
$$2\cos^2 x-1+\sqrt{2}\cos x+1=0;\ \ \cos x\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)=0.$$

Поскольку $\cos x\neq 0$ получаем: $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда

$$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n \text{ или } x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\text{ где } n\in\mathbb{Z}.$$

Условию $\operatorname{tg} x-1\neq 0$ удовлетворяют только числа $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$.

б) На отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем единственный корень $x=\dfrac{11\pi}{4}$.



Ответ: а) $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{11\pi}{4}$.

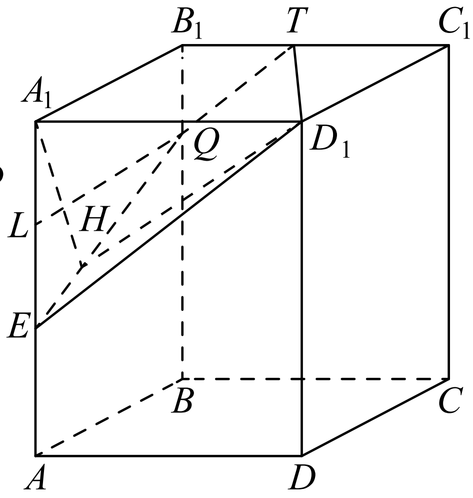
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=4:3$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=5$, $AD=8$, $AA_1=14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

Решение.



а) Так как $A_1E:EA=3:4$ и $AA_1=14$, то $AE=6$ и $EA_1=8$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и BCC_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро BB_1 в такой точке Q, что прямая TQ параллельна прямой ED_1. Значит, треугольники EA_1D_1 и QB_1T подобны, а поскольку $EA_1=A_1D_1=8$, то и $QB_1=B_1T=4$. Значит, $QB=10$ и $QB_1:QB=2:5$.

б) Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EQ пересечения этих плоскостей. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1Q высоту $QL=5$ (очевидно L, середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EQA_1, найдём $A_1H\cdot EQ=A_1E\cdot QL$, то есть $A_1H=\dfrac{QL\cdot A_1E}{QE}=\dfrac{5\cdot 8}{\sqrt{5^2+4^2}}=\dfrac{40}{\sqrt{41}}$. Тогда тангенс искомого угла равен $8:\dfrac{40}{\sqrt{41}}=\dfrac{\sqrt{41}}{5}$.

Ответ: а) $2:5$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{41}}{5}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах.	2
Обоснованно найдено сечение в пункте *а*, ИЛИ верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17 Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-3}} 7 \le \log_{\frac{x}{3}} 7$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при $x > 0$ и $\frac{x}{x-3} > 0$.

Отсюда следует, что $x - 3 > 0$, то есть $x > 3$. При этом условии $\frac{x}{x-3} > 1$, значит, $\log_{\frac{x}{x-3}} 7 > 0$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_7 \frac{x}{x-3} \ge \log_7 \frac{x}{3} > 0\text{, откуда } \frac{x}{x-3} \ge \frac{x}{3} > 1.$$

Следовательно, $x > 3$ и $x - 3 \le 3$, то есть $x \le 6$.

Ответ: $(3; 6]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

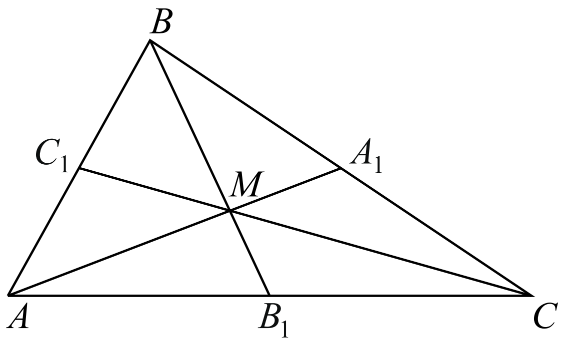
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

Решение.

а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$



Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна $180°$.

Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

Ответ: 125.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. В конце каждого месяца к оставшейся сумме основного долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

Решение.
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{16S}{17},\ \ldots,\ \frac{2S}{17},\ \frac{S}{17},\ 0.$$

К концу каждого месяца к основной сумме добавляется $r\,\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$. Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS,\ \frac{16kS}{17},\ \ldots,\ \frac{2kS}{17},\ \frac{kS}{17}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{17},\ \frac{16(k-1)S+S}{17},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{17},\ \frac{(k-1)S+S}{17}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{16}{17}+\ldots+\frac{2}{17}+\frac{1}{17}\right)=S\left(1+\frac{18(k-1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 27 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому $9(k-1)=0{,}27$; $k=1{,}03$; $r=3$.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено, ИЛИ верный ответ найден подбором.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5\le 0,\\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2\ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.
Решение системы может быть единственным в двух случаях.

1 случай. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5=0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2=0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$x^2-2x-3=0 \text{, откуда } x=-1 \text{ или } x=3 .$$

Если $x=-1$, то $a+1+2(a+2)+a+2=0$, а значит $a=-\frac{7}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases} -7x^2+6x+13\le 0, \\ -3x^2-2x+1\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le -1 \text{ или } x\ge \frac{13}{7}, \\ -1\le x\le \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Единственное решение $x=-1$.

Если $x=3$, то $9(a+1)-6(a+2)+a+2=0$, откуда $a=\frac{1}{4}$. Получаем:

$$\begin{cases} x^2-10x+21\le 0, \\ 5x^2-18x+9\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\le x\le 7, \\ x\le \frac{3}{5} \text{ или } x\ge 3, \end{cases} \quad 3\le x\le 7.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

2 случай. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.
Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+1)^2-a(a+5)=0, \\ a>0, \end{cases} \quad \text{откуда } a=\frac{1}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x=4$, которое удовлетворяет второму неравенству.
Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+2)^2-(a+1)(a+2)=0, \\ a<-1, \end{cases} \quad \text{откуда } a=-2.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\frac{7}{4}$, $a=\frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения a, но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получено одно из значений a.	2
Задача верно сведена к исследованию системы уравнений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>2d$?

Решение.

а) Пусть $a=10$, $b=50$, $c=15$ и $d=45$. Тогда $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{60}{95}=\frac{12}{19}$.

б) Предположим, что $11\cdot\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$. Тогда

$$11\cdot(3a+2c)bd=(b+d)(3ad+2bc),$$

$$33abd+22bcd=3abd+2bcd+3ad^2+2b^2c,$$

$$30abd-3ad^2=2b^2c-20bcd \text{ и } 3ad(10b-d)=2bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем $10b-d\geq 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10\geq b-10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\geq c\geq 2d+1$ и $a\geq 3b+1$. Значит, $d\leq\frac{98}{2}=49$.

Используя неравенства $a\geq 3b+1$, $c\geq 2d+1$, $d\leq 49$ и $b\geq 10$, получаем

$$\frac{3a+2c}{b+d}\geq\frac{9b+4d+5}{b+d}=4+\frac{5b+5}{b+d}\geq 4+\frac{5b+5}{b+49}=9-\frac{240}{b+49}\geq 9-\frac{240}{59}=\frac{291}{59}.$$

Пусть $a=31$, $b=10$, $c=99$ и $d=49$. Тогда $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{291}{59}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{3a+2c}{b+d}$ равно $\frac{291}{59}$.

Ответ: а) Да, например, если $a=10$, $b=50$, $c=15$ и $d=45$; б) нет; в) $\frac{291}{59}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4