Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15 а) Решите уравнение $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$.

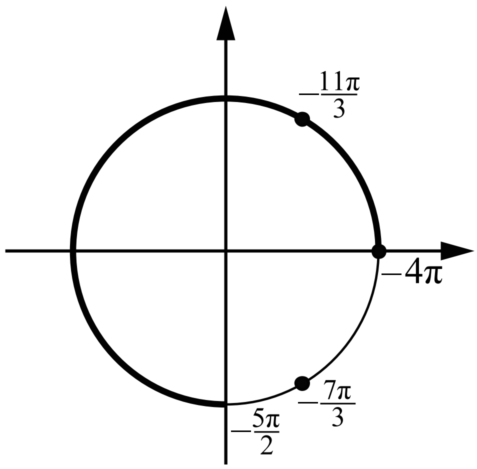
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 2 = 0; \qquad 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Получаем $\cos x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = 2\pi n$ или $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x = -4\pi$ и $x = -\frac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -4π, $-\frac{11\pi}{3}$.

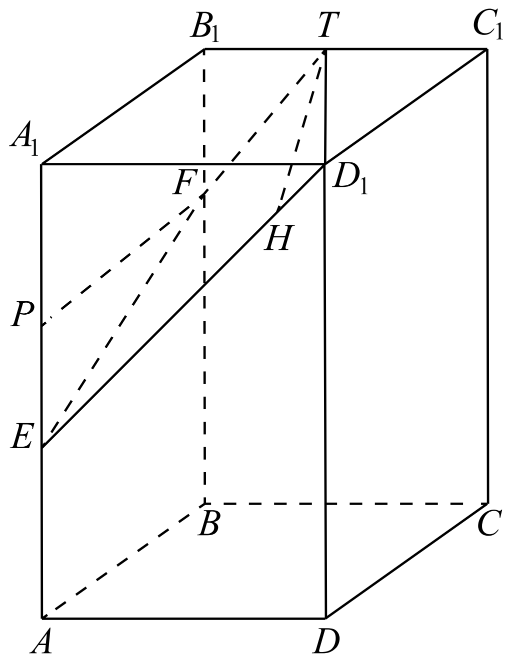
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=5:3$, на ребре BB_1 − точка F так, что $B_1F:FB=5:11$, а точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Решение.



а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам.

$TB_1=5$, $B_1F=\dfrac{5}{16}\cdot 16=5$, $A_1E=\dfrac{5}{8}\cdot 16=10$ и $A_1D_1=10$.

Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1C_1 параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Поэтому прямые ED_1 и FT также параллельны. Если плоскость EFT не проходит через точку D_1, то получается, что в плоскости AA_1D_1D через точку E проходят две различные прямые, параллельные прямой FT. Получили противоречие.

б) Сечение параллелепипеда плоскостью EFT − трапеция. Проведём через точку F прямую, параллельную прямой AB. Получим точку P на ребре AA_1.

$$PE=A_1E-B_1F=5, \qquad PF=6\sqrt{2}.$$

Тогда

$$EF=\sqrt{PE^2+PF^2}=\sqrt{25+72}=\sqrt{97};$$

$$D_1T=\sqrt{D_1C_1^{\,2}+C_1T^2}=\sqrt{72+25}=\sqrt{97}.$$

Следовательно, $EF=D_1T$, и трапеция $EFTD_1$ равнобедренная. Проведём в ней высоту TH.

$$D_1H=\frac{D_1E-TF}{2}=\frac{10\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2};$$

$$TH=\sqrt{D_1T^2-D_1H^2}=\sqrt{97-\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{169}{2}}=\frac{13\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}\left(D_1E+TF\right)\cdot TH=\frac{1}{2}\left(10\sqrt{2}+5\sqrt{2}\right)\cdot\frac{13\sqrt{2}}{2}=\frac{15\cdot 13}{2}=\frac{195}{2}=97{,}5.$$

Ответ: б) $97{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах.	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17

Решите неравенство: $\dfrac{\log_{1-2x}\left(\left(x+1\right)\left(1-4x+4x^2\right)\right)}{\log_{x+1}\left(1-2x\right)} \le -1.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases} \left(\log_{1-2x}(x+1)+\log_{1-2x}(1-2x)^2\right)\cdot\log_{1-2x}(x+1)\le -1, \\ x+1\ne 1. \end{cases}$$

Сделаем замену $y=\log_{1-2x}\left(x+1\right)$. Получаем:

$$\left(y+2\right)y\le -1; \qquad \left(y+1\right)^2\le 0; \qquad y=-1.$$

Сделаем обратную замену: $\log_{1-2x}\left(x+1\right)=-1$. Тогда

$$\begin{cases} \left(1-2x\right)\left(x+1\right)=1, \\ x+1>0, \\ 1-2x\ne 1, \\ x+1\ne 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x^2-x=0, \\ x>-1, \\ x\ne 0, \end{cases}$$

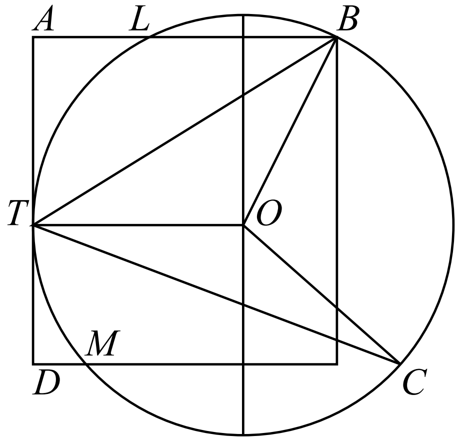
откуда $x=-0,5$.

Ответ: $-0,5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T. Точка O лежит внутри трапеции $ABCD$.
а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.
б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

Решение.
а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC − соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC = 2\angle BTC$.



б) Из условия касания окружности и стороны AD следует, что прямые OT и AD перпендикулярны. Пусть окружность вторично пересекает сторону AB в точке L и сторону CD − в точке M. Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB, делит каждую из хорд BL и CM пополам. Обозначим $OT = r$, тогда $AL = 2r - AB = 2r - 4$, $DM = 2r - CD = 2r - 9$.
По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 4(2r-4)$. Следовательно,

$$TB^2 = 4(2r-4) + 4^2 = 8r.$$

Аналогично $TC^2 = 18r$.
Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin\angle BTC$. Пусть h − искомое расстояние от точки T до прямой BC. Выразим площадь треугольника BTC двумя способами:

$$\frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin\angle BTC.$$

Отсюда получаем, что

$$h \cdot 2r \cdot \sin\angle BTC = \sqrt{8r} \cdot \sqrt{18r} \cdot \sin\angle BTC.$$

Следовательно, $h = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$.
Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования?

Решение. Пусть B_i − размер долга Жанны на конец месяца i, X_i − платеж Жанны в конце месяца i. Мы знаем, что имеет место соотношение $B_i = 1{,}02B_{i-1} - X_i$. Кроме того, мы знаем, что последовательность (B_i) является арифметической прогрессией. При этом $B_0 = 1200$ тыс. руб., а $B_{24} = 0$, так как в конце срока кредитования долг Жанны должен быть равен нулю. Этих двух точек достаточно, чтобы узнать всю последовательность B_i: $B_i = \frac{24-i}{24}\cdot 1200$. Значит,

$$X_i = 1{,}02B_{i-1} - B_i = \left(1{,}02\cdot\frac{25-i}{24} - \frac{24-i}{24}\right)\cdot 1200 = \frac{1{,}5-0{,}02i}{24}\cdot 1200.$$

Поскольку X_i линейно зависит от i, последовательность X_i также является арифметической прогрессией. Значит,

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} = \frac{(X_1 + X_{12})\cdot 12}{2} = 6\left(50\cdot 1{,}48 + 50\cdot 1{,}26\right) =$$
$$= 300\cdot(1{,}48 + 1{,}26) = 300\cdot 2{,}74 = 822 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 822 тыс. рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-2y)(y-2x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=2y$ и $y=2x$.

Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ − уравнение окружности с центром $(a,\,a)$ и радиусом $a^2\sqrt{5}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a\neq 0$. Тогда условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых. То есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности.

Можно воспользоваться геометрическим методом или использовать формулу расстояния от точки до прямой.

$$\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}}=\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}}=a^2\sqrt{5}.\text{ Отсюда } a=\pm 0{,}2.$$

Ответ: $a=\pm 0{,}2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения *a*, но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получено одно из значений *a*.	2
Задача верно сведена к исследованию системы уравнений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$?

Решение.

а) Пусть $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 2 + 1 = 3$, $a_4 = 1 + 3 = 4$, $a_5 = 3 + 4 = 7$ и $4a_5 = 7a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0$. Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности $3, 8, 11, 19, 30, 49, \dots$ показывает, что равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$ может выполняться при $n = 5$.

Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $30a_6 = 49a_5$.

Пусть $n \geq 6$ и $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{6n} > 0$. Тогда $a_n = 6na$ и $a_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \left(n^2 - 6n + 24\right)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = \left(-n^2 + 12n - 24\right)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = \left(2n^2 - 18n + 48\right)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3\left(n^2 - 10n + 24\right)a.$$

Так как $a_{n-4} > 0$, то $n^2 - 10n + 24 = (n-4)(n-6) < 0$. Следовательно, $n = 5$. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

15 а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$.

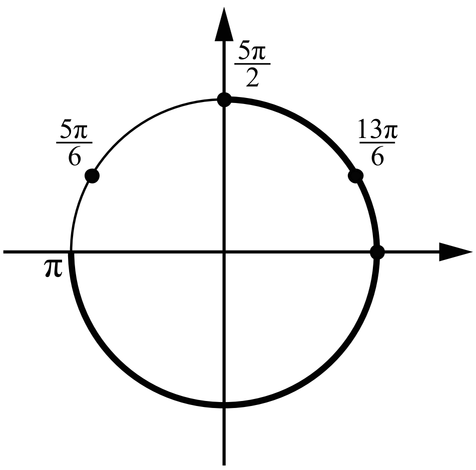
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0; \qquad 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Получаем $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем $x = \frac{13\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{2}$.

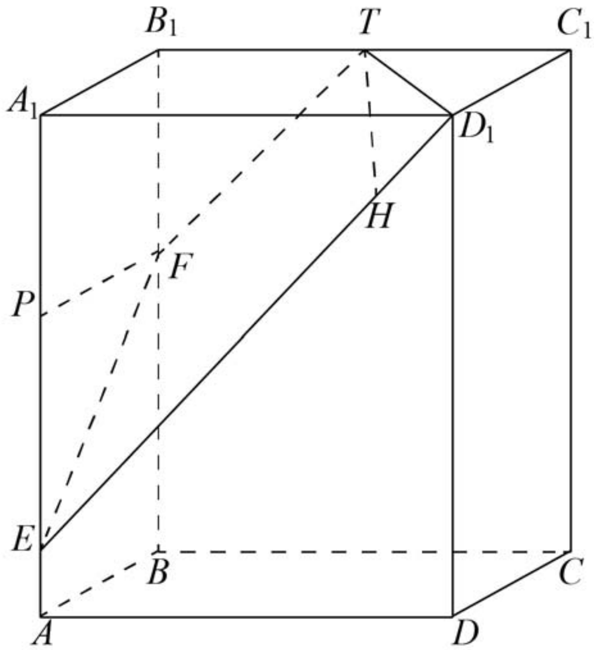
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

16 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=6:1$, на ребре BB_1 − точка F так, что $B_1F:FB=3:4$, а точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=4\sqrt{2}$, $AD=30$, $AA_1=35$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Решение.



а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам. $TB_1=15$, $B_1F=\frac{3}{7}\cdot 35=15$, $A_1E=\frac{6}{7}\cdot 35=30$ и $A_1D_1=30$. Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1C_1 параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Поэтому прямые ED_1 и FT также параллельны. Если плоскость EFT не проходит через точку D_1, то получается, что в плоскости AA_1D_1D через точку E проходят две различные прямые, параллельные прямой FT. Получили противоречие.

б) Сечение параллелепипеда плоскостью EFT − трапеция. Проведём через точку F прямую, параллельную прямой AB. Получим точку P на ребре AA_1.

$$PE=A_1E-B_1F=15,\quad PF=4\sqrt{2}.$$

Тогда

$$EF=\sqrt{PE^2+PF^2}=\sqrt{225+32}=\sqrt{257};$$

$$D_1T=\sqrt{D_1C_1^{\,2}+C_1T^2}=\sqrt{32+225}=\sqrt{257}.$$

Следовательно, $EF=D_1T$, и трапеция $EFTD_1$ − равнобедренная. Проведём в ней высоту TH.

$$D_1H=\frac{D_1E-TF}{2}=\frac{30\sqrt{2}-15\sqrt{2}}{2}=\frac{15\sqrt{2}}{2};$$

$$TH=\sqrt{D_1T^2-D_1H^2}=\sqrt{257-\frac{225}{2}}=\sqrt{\frac{289}{2}}=\frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}(D_1E+TF)\cdot TH=\frac{1}{2}\left(30\sqrt{2}+15\sqrt{2}\right)\cdot\frac{17\sqrt{2}}{2}=\frac{45\cdot 17}{2}=\frac{765}{2}=382{,}5.$$

Ответ: б) $382{,}5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах.	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

17

Решите неравенство: $\dfrac{\log_{1-x}\left(\left(3x+1\right)\left(1-2x+x^2\right)\right)}{\log_{3x+1}\left(1-x\right)} \le -1.$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases}\left(\log_{1-x}(3x+1)+\log_{1-x}(1-x)^2\right)\cdot\log_{1-x}(3x+1)\le -1,\\ 3x+1\ne 1.\end{cases}$$

Сделаем замену $y=\log_{1-x}\left(3x+1\right)$. Получаем:

$$\left(y+2\right)y\le -1;\qquad \left(y+1\right)^2\le 0;\qquad y=-1.$$

Сделаем обратную замену: $\log_{1-x}\left(3x+1\right)=-1$. Тогда

$$\begin{cases}\left(3x+1\right)\left(1-x\right)=1,\\ 1-x>0,\\ 1-x\ne 1,\\ 3x+1\ne 1;\end{cases}\qquad \begin{cases}-3x^2+2x=0,\\ x<1,\\ x\ne 0,\end{cases}$$

откуда $x=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

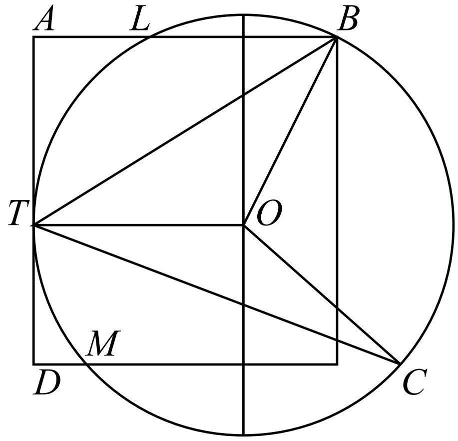
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

18 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T. Точка O лежит внутри трапеции $ABCD$.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 1 и 25 соответственно.

Решение.



а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC − соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC = 2\angle BTC$.

б) Из условия касания окружности и стороны AD следует, что прямые OT и AD перпендикулярны. Пусть окружность вторично пересекает сторону AB в точке L и сторону CD − в точке M. Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB, делит каждую из хорд BL и CM пополам. Обозначим $OT = r$, тогда

$$AL = 2r - AB = 2r - 1,\ DM = 2r - CD = 2r - 25.$$

По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 2r - 1$. Следовательно,

$$TB^2 = 2r - 1 + 1^2 = 2r.$$

Аналогично $TC^2 = 50r.$

Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin\angle BTC$. Пусть h − искомое расстояние от точки T до прямой BC. Выразим площадь треугольника BTC двумя способами:

$$\frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin\angle BTC.$$

Отсюда получаем, что

$$h \cdot 2r \cdot \sin\angle BTC = \sqrt{2r} \cdot \sqrt{50r} \cdot \sin\angle BTC.$$

Следовательно, $h = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

19 Жанна взяла в банке в кредит 1,8 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 1 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования?

Решение. Пусть B_i − размер долга Жанны на конец месяца i, X_i − платеж Жанны в конце месяца i. Мы знаем, что имеет место соотношение $B_i = 1{,}01B_{i-1} - X_i$. Кроме того, мы знаем, что последовательность (B_i) является арифметической прогрессией. При этом $B_0 = 1800$ тыс. руб., а $B_{24} = 0$, так как в конце срока кредитования долг Жанны должен быть равен нулю. Этих двух точек достаточно, чтобы узнать всю последовательность B_i: $B_i = \frac{24-i}{24}\cdot 1800$. Значит,

$$X_i = 1{,}01B_{i-1} - B_i = \left(1{,}01\cdot\frac{25-i}{24} - \frac{24-i}{24}\right)\cdot 1800 = \frac{1{,}25-0{,}01i}{24}\cdot 1800.$$

Поскольку X_i линейно зависит от i, последовательность X_i также является арифметической прогрессией. Значит,

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_{12} = \frac{(X_1 + X_{12})\cdot 12}{2} = 6\left(75\cdot 1{,}24 + 75\cdot 1{,}13\right) =$$

$$= 450\cdot(1{,}24+1{,}13) = 450\cdot 2{,}37 = 1066{,}5 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 1066,5 тыс. рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2=10xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-3y)(y-3x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=3y$ и $y=3x$.

Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ − уравнение окружности с центром $(a,\,a)$ и радиусом $a^2\sqrt{10}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a\neq 0$. Тогда условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых. То есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности.

Можно воспользоваться геометрическим методом или использовать формулу расстояния от точки до прямой.

$$\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}}=\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}}=a^2\sqrt{10}. \text{ Отсюда } a=\pm 0,2.$$

Ответ: $a=\pm 0,2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены оба значения *a*, но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получено одно из значений *a*.	2
Задача верно сведена к исследованию системы уравнений.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

21 Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$?

Решение.

а) Пусть $a_1 = 3$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 3 + 1 = 4$, $a_4 = 1 + 4 = 5$, $a_5 = 4 + 5 = 9$ и $5a_5 = 9a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \dfrac{a_5}{7} > 0$. Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности $3, 3, 6, 9, 15, 24, \dots$ показывает, что равенство $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$ может выполняться при $n = 5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $15a_6 = 24a_5$.

Пусть $n \ge 6$ и $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$. Положим $a = \dfrac{a_n}{3n} > 0$. Тогда $a_n = 3na$ и $a_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \left(n^2 - 3n - 1\right)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = \left(-n^2 + 6n + 1\right)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = \left(2n^2 - 9n - 2\right)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3\left(n^2 - 5n - 1\right)a.$$

Так как $a_{n-4} > 0$, то $n^2 - 5n - 1 < 0$. При $n \geq 6$ это неравенство не выполнено. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — в пункте *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4